NMSA334: cvičení 8 – řetězce se spojitým časem

Definice 8.1: Systém náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ s hodnotami v diskrétní množině S se nazývá *Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů* S, jestliže

$$P(X_t = j \mid X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j \mid X_s = i)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pro všechna $i, j, i_1, \dots, i_n \in S$ a pro všechna $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$ taková, že $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) > 0$. Podmíněné pravděpodobnosti $P(X_t = j \mid X_s = i) = p_{ij}(s, t)$ se nazývají *pravděpodobnosti přechodu* ze stavu i v čase s do stavu j v čase t.

Budeme se zabývat jen *homogenními* řetězci se spojitým časem, tj. takovými, pro které platí $p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(t)$, $s \geq 0$, $t > 0$. Máme systém matic pravděpodobností přechodu $\{\boldsymbol{P}(t), t > 0\}$, jejichž nezáporné prvky $p_{ij}(t)$ splňují $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$. Je obvyklé definovat $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, tj. $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$.

Vektor $\boldsymbol{p}(0)$ počátečních pravděpodobností udává rozdělení řetězce v čase $t = 0$. Absolutní pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(t)$ v čase t dostaneme ze vztahu $\boldsymbol{p}(t)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}(0)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}(t)$.

Definice 8.2: Předpokládejme, že $\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ pro $i, j \in S$, tj. pravděpodobnosti přechodu jsou zprava spojité v bodě 0. Pak existují limity $q_i = \lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \leq \infty$ a $q_{ij} = \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} < \infty$ pro $i \neq j$, které splňují $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$ pro každé $i \in S$. Budeme uvažovat jen řetězce, pro které platí rovnost (pro konečné řetězce je rovnost zřejmá). Nezáporná čísla q_{ij} se nazývají *intenzity přechodu* ze stavu i do stavu j. Nezáporné číslo q_i se nazývá *celková intenzita*. Matice $\boldsymbol{Q} = \{q_{ij} : i, j \in S\}$, kde $q_{ii} = -q_i$, se nazývá *matice intenzit přechodu.*

Věta 8.1: Je-li $q_i = 0$, potom $p_{ii}(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$ (stav i je absorpční). Předpokládejme, že $0 < q_i < \infty$. Doba, po kterou řetězec setrvá ve stavu i, má exponenciální rozdělení s intenzitou q_i (neboli střední hodnotou $1/q_i$). Pravděpodobnost, že řetězec ze stavu i přejde nejprve do stavu j, je rovna $q^*_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$ pro všechna $j \neq i$. Pokud uvažujeme časové okamžiky, v nichž dojde k přechodu mezi stavy, získáme *vnořený* diskrétní řetězec procesu $\{X_t, t \geq 0\}$. Jeho matice pravděpodobností přechodu má tvar $\boldsymbol{Q}^* = \{q^*_{ij} : i, j \in S\}$, kde $q^*_{ii} = 0$.

Věta 8.2 (Kolmogorovovy diferenciální rovnice): Předpokládejme, že $q_i < \infty$ pro všechna $i \in S$. Potom pravděpodobnosti přechodu jsou diferencovatelné a pro všechna $t > 0$ platí $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)$ (*retrospektivní rovnice*). Je-li konvergence $p_{ij}(h)/h \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} q_{ij}$ stejnoměrná v i pro pevné j (tento předpoklad je vždy splněn pro řetězce s konečně mnoha stavy), potom pro všechna $t > 0$ platí $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$ (*prospektivní rovnice*).

Věta 8.3: Pro Markovovy řetězce s konečně mnoha stavy mají soustavy $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)$ a $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$ jediné řešení, které vyhovuje počáteční podmínce $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$, a které představuje systém matic pravděpodobností přechodu. Maticově lze toto řešení psát pomocí maticové exponenciální funkce ve tvaru $\boldsymbol{P}(t) = \exp\{\boldsymbol{Q}t\}$, $t \geq 0$.

Příklad 8.1: Mějme dán homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\{0, 1\}$, který má matici intenzit přechodu

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte odpovídající matice pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(t)$, $t > 0$.

Příklad 8.2: Mějme dán homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\{0, 1\}$, který má matici intenzit přechodu

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

kde $\lambda, \mu \geq 0$. Předpokládejme, že počáteční rozdělení je $\boldsymbol{p}(0) = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. Určete absolutní pravděpodobnosti v čase $t > 0$.

Příklad 8.3: Uvažujme homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, který má matici intenzit přechodu

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte odpovídající matice pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(t)$, $t > 0$. Určete matici pravděpodobností přechodu příslušného vnořeného řetězce.

Příklad 8.4: Určete hodnoty parametrů $q \in \mathbb{R}$, pro které je matice

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -q^3 & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \\ 1 & -q & q-1 \end{pmatrix}$$

maticí intenzit přechodu pro nějaký homogenní Markovův řetězec se spojitým časem.